

$$1) \quad y''''(x) + y''(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\text{Necht' } f(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

Char. pol. homog. rovnice je

$$\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda + i)(\lambda - i)$$

Dostáváme FS $\{1, \sin(x), \cos(x)\}$.

$\frac{1}{\cos(x)}$ není speciální jedna strana.

Hledáme řešení tvaru

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x) \sin(x) + C_3(x) \cos(x)$$

$$y'(x) = \underbrace{C_1'(x) + C_2'(x) \sin(x) + C_3'(x) \cos(x)}_{\text{položme } = 0} +$$

$$+ C_2(x) \cos(x) - C_3(x) \sin(x)$$

$$\gamma''(x) = \underbrace{C_2'(x) \cos(x) - C_3'(x) \sin(x)}_{\text{pol. line} = 0}$$

$$-C_2(x) \sin(x) - C_3(x) \cos(x)$$

$$\gamma'''(x) = \underbrace{-C_2'(x) \sin(x) - C_3'(x) \cos(x)}_{\text{Z rownise} = \frac{1}{\cos(x)}}$$

$$-C_2(x) \cos(x) + C_3(x) \sin(x)$$

$$C_1'(x) + C_2'(x) \sin(x) + C_3'(x) \cos(x) = 0$$

$$C_2'(x) \cos(x) - C_3'(x) \sin(x) = 0$$

$$-C_2'(x) \sin(x) - C_3'(x) \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

! $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ +

$$-C_3'(x) \left(\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$C_3' = -1$$

$$C_2'(x) \cos(x) + \sin(x) = 0$$

$$C_2'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$C_1'(x) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = \cos(x) = 0$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Telg

$$C_3(x) = -x$$

$$C_2(x) = \log |\cos(x)|$$

$$C_1(x) \stackrel{c}{=} \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x) dx \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1}{1-t^2} dt = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log |1+t| - \log |1-t| \right) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right|$$

Dostáváme kandidátka na řez:

$$f_r(x) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right| + \log |\cos(x)| \sin(x) - x \cos(x)$$



7 kos 5 kn v yac ch'v'ame



Obece' reson.!

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right| + \log |\cos(x)| \sin(x) - x \cos(x)$$

$$+ d_1 + d_2 \sin(x) + d_3 \cos(x), \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi \right)$$

$$L \in \mathbb{Z}$$

Eulerovy rovnice:

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots$$

$$\dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

Je-li (α, β) max. interval obs. řešení v D

a $x_0 \in (0, \infty) \cap (\alpha, \beta)$ pak pro každou n -tici čísel
 $(y_0, \dots, y_{n-1})$ existuje právě jedno max. řešení

$$\gamma: (0, \infty) \cap (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \gamma(x_0) = \gamma_0, \quad \gamma'(x_0) = \gamma_1, \dots$$

$\dots \gamma^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}$ Navíc pokud γ_p je nějaké řešení, pak každé řešení γ je tvaru

$$\gamma = \gamma_p + \gamma_0 \quad \text{kde } \gamma_0 \text{ řeší homogenní rovnici.}$$

$$\text{Stejně pro } x_0 \in (-\infty, 0) \cap (\alpha, \beta)$$

Substitution :

Polarisation $x = \pm e^t$, $z(t) = y(\pm e^t)$

Bino $x \in \text{loop}$,

$$z'(t) = y'(e^t) e^t \quad \Rightarrow \quad y'(e^t) = z'(t) e^{-t}$$

$$z''(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t \quad \Rightarrow \quad y''(e^t) = z''(t) e^{-2t} - z'(t) e^{-2t}$$

$$z'''(t) = y'''(e^t) e^{3t} + 3y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t$$

$$\Rightarrow y'''(e^t) = e^{-3t} (z'''(t) - 3 z''(t) + \cancel{z'(t)})$$

2

$$2) \quad x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = x \quad \text{na } (0, \infty)$$

$x = e^t$. S výměnou tím předchozí rovnici dostáváme:

$$e^{2t} (z''(t) e^{-2t} - z'(t) e^{-2t}) - e^t z'(t) e^{-t} + z(t) = e^t$$

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t$$

Char. pol. homogenní rovnice je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Dosťávame FS: $\{e^t, te^t\}$.

$e^t (1 \cos(0) + 0 \sin(0))$ je špeciálna RHS,

1 je ľuďa char. pol. násobnosť 2.

Hľadáme riešenie tvaru $z(t) = \underline{a \cdot t^2 e^t}$ kde $a \in \mathbb{R}$

$$z'(t) = \underline{2at e^t} + \underline{at^2 e^t}$$

$$z''(t) = \underline{2a e^t} + \underline{4at e^t} + \underline{at^2 e^t}$$

Porovnaním: $2ae^t = e^t \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Dostáváme obecní řešení

$$z(t) = e^t \left(\frac{1}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Delta(e^t) = z(t) \text{ i.e.}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Delta(x) = z(\log(x))$$

$$\Delta(x) = x \left(\frac{1}{2} \log^2(x) + c_1 \log(x) + c_2 \right), \quad x \in (0, \infty)$$
$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice je "symetrická" :

Nechť $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná Eulerova rovnice.

Uvažujme $z : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. P_q
 $x \mapsto \gamma(-x)$

$$z^{(k)}(x) = (-1)^k \gamma^{(k)}(-x)$$

$$x^n z^{(n)}(x) + \dots + a_0 z(x) = (-x)^n \gamma^{(n)}(-x) + \dots + a_0 \gamma(-x)$$

$= f(-x)$... je-li f sudá, z řeší rovnici

$m_1 (-\infty, 0)$, je-li f lichá - z f esí f ovází
 $m_2 (-\infty, 0)$

$$3) \quad x^3 y'''(x) + x y'(x) - y(x) = x^2$$

Nejprve na $(0, \infty)$. (*) Alež: y tvaru $y(x) = x^\lambda$.

$$\text{Pak } y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y''(x) = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2}, \quad y'''(x) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) x^{\lambda-3}$$

Dosažeme :

$$x^\lambda (\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1) = 0$$

Nejprve homogenní rovnice.

Vskláň $x^{\lambda > 0}$ dostává

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) > 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

Dostává FS:

$$\{x, \log(x)x, \log^2(x)x\}$$

x^2 je speciální pravá strana
? není buďto chr. pol.

$$u e^{2t} u$$

Hleďme řešení!

$$y_p(x) = ax^2$$

$$y = ae^{2x}$$

$$y_p'(x) = 2xa$$

$$y_p''(x) = 2a$$

$$y_p'''(x) = 0$$

Pasať do rovnice: $a = 1$. Obecné řešení

$$y(x) = x^2 + C_1 x + C_2 x \log(x) + C_3 x \log^2(x), \quad x \in (0, \infty)$$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

11.0 $x \in (-\infty, 0)$:

$$f(x) = x^2 + c_1 x + c_2 x \log|x| + c_3 x \log^2|x|,$$

$x \in (-\infty, 0)$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$$